Zur Dezentralisierung des quadratischen Standortproblems
Author(s): Karl Mosler
Source: *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft / Journal of Institutional and Theoretical Economics*, Bd. 134, H. 3. (September 1978), pp. 464-476
Published by: Mohr Siebeck GmbH & Co. KG
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/40750045
Accessed: 16-08-2016 11:45 UTC

Zur Dezentralisierung des quadratischen Standortproblems

von

Karl Mosler

Hamburg

Dieser Beitrag untersucht das Problem, wie interdependente Aktivitäten in einem räumlichen Zusammenhang am günstigsten zu verteilen sind und unter welchen Umständen eine günstige Verteilung dezentral durch Preise aufrechterhalten werden kann. Auf eine vorgegebene Anzahl von Standorten soll eine Anzahl von Aktivitäten verteilt werden, die in wechselseitigen raumwirtschaftlichen Beziehungen stehen. Eine solche Verteilung wird durch eine Matrix x beschrieben, deren Elemente für jeden Standort und für jede Aktivität angeben, auf welchem Niveau die Aktivität an diesem Standort betrieben wird. Es liegt nahe, die verschiedenen Verteilungen oder Zuweisungen durch eine Kostenfunktion zu bewerten, die mindestens quadratisch in den Elementen von x ist. Die quadratischen Terme lassen sich darin als erste Approximation der Wechselwirkungskosten zwischen den Aktivitäten auffassen. Ein rein quadratischer Ansatz für die Wechselwirkungskosten läßt sich darüber hinaus ökonomisch aus der Annahme linearer Technologien begründen: in einem räumlich dissoziierten Leontief-Modell ist der Güterstrom zwischen zwei Orten proportional dem Produkt aus den beiden dortigen Aktivitätsniveaus; unterstellt man eine konstante Frachtrate, gilt dies auch für die Kosten der Transaktion.

Wir nehmen an, daß jede Aktivität unteilbar ist und nur als Ganzes einem Standort zugeteilt werden kann, ferner, daß jeder Standort Platz für nicht mehr als eine Aktivität bietet. Das Problem, eine quadratische Kostenfunktion unter diesen Nebenbedingungen zu minimieren, ist in der Theorie der ganzzahligen Programmierung als Quadratisches Zuweisungsproblem oder Quadratic Assignment Problem (*QAP*) bekannt. Unter diesem Namen wurde es erstmals 1957 von Koopmans und Beckmann in ihrem vielzitierten Aufsatz "Assignment problems and the location of economic activities" (KOOPMANS and BECKMANN [1957]) vorgestellt. Vernachlässigt man die Kosten der Wechselwirkungen – etwa indem man alle Frachtraten oder alle Güterströme Null setzt –, so wird aus dem *QAP* ein lineares Zuweisungsproblem: seine optimale Lösung erweist sich sozusagen von selbst als ganzzahlig, und es gibt in jedem Fall Effizienzpreise, mit Hilfe derer sie dezentral aufrechterhalten bleibt.

Die Frage, ob und unter welchen Umständen auch eine im *QAP* optimale Zuweisung mittels Preisen dezentralisiert werden kann, ist bereits 1957 von Koopmans und Beckmann gestellt worden. Die Autoren kamen zu einer völlig negativen Antwort und zogen schwerwiegende Konsequenzen bezüglich der Funktionsfähigkeit jedes Marktsystems, das den kostspieligen Transport von

Gütern einschließt. Unlängst hat HEFFLEY ([1972] und [1976]) jedoch darauf hingewiesen, daß dieses negative Ergebnis auf eine spezielle Wahl der Parameter der Zielfunktion in KOOPMANS und BECKMANN [1957] zurückzuführen ist. Er und HARTWICK [1974] haben Beispiele angegeben, in denen sehr wohl Effizienzpreise existieren.

Im folgenden möchte ich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Parameter des *QAP* herleiten, unter denen Effizienzpreise existieren, und ihre ökonomische Bedeutung diskutieren; ferner werde ich geeignete Änderungen der Parameter erörtern und ein System von Steuern und Subventionen angeben, das eine einmal erreichte optimale Zuweisung stützt.

Im Abschnitt 1 wird zunächst das quadratische Zuweisungsproblem und seine Linearisierung zu einem gemischt-ganzzahligen linearen Programm beschrieben; Abschnitt 2 enthält das zugehörige lineare Dualprogramm und dessen Interpretation. Im Abschnitt 3 werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Effizienzpreisen zu einer optimalen Zuweisung bewiesen und an einigen Anwendungsbeispielen dargelegt. Abschnitt 4 schließlich behandelt mögliche Änderungen der Parameter und gibt ein System von Subventionen und Steuern an, das eine optimale Zuweisung aufrechterhält. Zum Schluß wird kurz das Problem der Kosten des Standortwechsel erörtert.

1. Das quadratische Zuweisungsproblem und seine Linearisierung

Sei $m \leq n$ und seien A, B und C Matrizen des Formats $(m \times n)$, $(m \times m)$ bzw. $(n \times n)$, für deren Elemente $b_{kl} \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $c_{ii} = 0$ und $c_{ij} + c_{ik} \geq c_{ik}$ gelte; C ist demnach eine Distanzmatrix. Wir betrachten das quadratische Zuweisungsproblem in der Form[1]:

$$(QAP) \quad \begin{cases} \max\limits_{x_{ki}} \sum\limits_{ki} a_{ki} x_{ki} - \sum\limits_{klij} b_{kl} c_{ij} x_{ki} x_{lj} & \text{unter} \\ (1) \quad \sum\limits_{k} x_{ki} \leq 1 & \text{für } i = 1, 2, \ldots, n \\ (2) \quad \sum\limits_{i} x_{ki} = 1 & \text{für } k = 1, 2, \ldots, m \\ (3) \quad x_{ki} \in \{0, 1\} & \end{cases}$$

und interpretieren es als ein Standortproblem:

m Firmen $(k = 1, \ldots, m)$ sind auf n Standorte $(i = 1, \ldots, n)$ zu verteilen. Sie produzieren mit fester Technologie ohne Substitution für eine ggf. feste Endnachfrage, wobei Firma k an Firma l Zwischenprodukte des Gewichts b_{kl} liefert. c_{ij} DM/kg kostet der Transport von Ort i zum Ort j. Wenn Firma k der Ort i

[1] Summiert werde im folgenden jeweils über alle Indexwerte. Generalisierungsvermerke wie „für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$" sind i.d.R. unterdrückt.

zugewiesen wird – d.h. wenn in (QAP) $x_{ki}=1$ ist –, realisiert sie dort die Einnahme a_{ki}. Zu maximieren ist die Summe dieser Einnahmen abzüglich der für die Zwischenprodukte entstehenden Transportkosten. (1) besagt, daß jede Firma genau einen Standort erhält. Wie man zeigen kann, gibt es zu jeder optimalen Lösung $\bar{x}$ von (QAP) eine optimale Lösung $(\bar{x}, \bar{y})$ des folgenden gemischt-ganzzahligen linearen Programms $(LQAP)$, und die Maximumwerte sind gleich.

$$(LQAP)\quad \begin{cases} \max\limits_{x_{ki},\, y_{klij}} \sum\limits_{ki} a_{ki}x_{ki} - \sum\limits_{klij} c_{ij}y_{klij} \\ \text{unter (1), (2), (3) und} \\ (4) \qquad x_{ki}\, b_{kl} + \sum\limits_{j} y_{klji} - x_{li}\, b_{kl} - \sum\limits_{j} y_{klij} \geq 0 \\ (5) \qquad y_{klij} \geq 0 \end{cases}$$

Insbesondere läßt sich unter den optimalen Lösungen von $(LQAP)$ immer eine auswählen, für die

$$y_{klij} = b_{kl}\, x_{ki}\, x_{lj}$$

gilt. Eine solche sei im folgenden jeweils gewählt. – Ersetzt man die Ganzzahligkeitsforderung (3) durch die Bedingung $x_{ki} \geq 0$, erhält man ein gewöhnliches lineares Programm, das wir mit (L) bezeichnen:

$$(L) \qquad \max_{(x,y)\in\tilde{Z}} \sum_{ki} a_{ki}x_{ki} - \sum_{klij} c_{ij}y_{klij}$$

$$\text{mit } \tilde{Z} := \left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}_+^{mn},\ y \in \mathbb{R}_+^{m^2n^2},\ \sum\limits_k x_{ki} \leq 1,\ \sum\limits_i x_{ki} = 1, \\ (x_{li} - x_{ki})\, b_{kl} + \sum\limits_j (y_{klij} - y_{klji}) \leq 0 \end{array}\right\}.$$

Falls B oder C die Nullmatrix ist, also im Spezialfall des linearen Zuweisungsproblems, findet sich unter den optimalen Lösungen von (L) immer eine, die auch (3) erfüllt und so $(LQAP)$ und (QAP) optimal löst. Im quadratischen Zuweisungsproblem mit nichtverschwindenden B und C braucht dies nicht mehr zu gelten. Bereits für $m=n=2$ lassen sich spezielle Parametermatrizen angeben, für die (L) das (QAP) löst bzw. nicht löst[2]. Zwar kann man den Zulässigkeitsbereich Z von (L) durch weitere lineare Bedingungen verkleinern und dem Zulässigkeitsbereich

$$Z := \{(x,y) \in \tilde{Z} \,|\, x_{ki} \in \{0,1\}\}$$

von $(LQAP)$ annähern, so daß für kleine n das $(LQAP)$ durch ein gewöhnliches LP gelöst wird[3]; doch ist kein LP bekannt, das auch für größere n dem $(LQAP)$

[2] s. HEFFLEY [1972] S. 1157 bzw. KOOPMANS and BECKMANN [1957] S. 68f.
[3] Für $n \leq 3$ vgl. CONRAD [1971] S. 61ff., auch S. VI.

äquivalent wäre. Zudem fällt es schwer, den zusätzlichen Nebenbedingungen einen ökonomischen Sinn zu geben. Dem zugehörigen dualen Programm läßt sich erst recht kein realistischer Konkurrenzmechanismus mehr unterschieben, der eine dezentrale Lösung erlaubte.

Nun hat gerade für das quadratische Zuweisungsproblem als Standortproblem die Frage nach einer dezentralen Lösung eigenes Gewicht[4]. Im folgenden werde ich ein Dualproblem zu (*LQAP*) formulieren und untersuchen, für welche *A*, *B* und *C* die im Linear Programming üblichen Forderungen an die Dualvariablen erfüllt werden können.

2. *Ein Dualprogramm zu* (*LQAP*)

Wir betrachten das folgende gemischt-ganzzahlige lineare Max-Min-Programm (*LQAP**):

$$(LQAP^*)\left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{x_{ki}} \min\limits_{q_k, r_i, v_{ki}} \sum\limits_k q_k + \sum\limits_i r_i - \sum\limits_{ki} v_{ki} x_{ki} & \text{unter} \\ (6) \quad q_k + r_i + \sum\limits_l b_{lk} u_{lki} - \sum\limits_l b_{kl} u_{kli} - v_{ki} = a_{ki} & \\ (7) \quad u_{klj} - u_{kli} \leq c_{ij} & \\ (8) \quad 1 r_i \geq 0,\ u_{kli} \geq 0 & \\ (3) \quad x_{ki} \in \{0,1\} & \end{array}\right.$$

oder anders geschrieben

$$(LQAP^*) \quad \max_{x \in X} \min_{(q,r,v) \in U} \sum_k q_k + \sum_i r_i - \sum_{ki} v_{ki} x_{ki}$$

$$\text{mit } X := \{0,1\}^{mn}$$

$$U := \{(q,r,v) | q \in \mathbb{R}^m,\ r \in \mathbb{R}^n_+,\ v \in \mathbb{R}^{mn},\ \text{es gibt } u \in \mathbb{R}^{m^2 n}_+ \text{ mit (6) und (7)}\}.$$

Es läßt sich zeigen[5]:

Lemma 1: Wenn $(\bar{x}, \bar{y})$ das (*LQAP*) optimal löst, dann existieren Zahlen $\bar{q}_k$, $\bar{r}_i$, $\bar{v}_{ki}$, so daß $(\bar{x}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{v})$ optimale Lösung von (*LQAP**) ist, und es gilt

$$\max_{(x,y) \in Z} \Big(\sum_{ki} a_{ki} x_{ki} - \sum_{klij} c_{ij} y_{klij}\Big) = \max_{x \in X} \min_{(q,r,v) \in U} \Big(\sum_k q_k + \sum_i r_i - \sum_{ki} v_{ki} x_{ki}\Big).$$

In der Sprache des Standortproblems kann man (*LQAP**) so interpretieren: r_i ist die Rente des Standorts *r*, q_k die Entlohnung der Firma *k*; u_{kli} steht für den

[4] Vgl. Koopmans and Beckmann [1957] S. 67ff.

[5] Etwa durch Anwendung eines Satzes von Balas [1970] S. 185.

Preis einer Gewichtseinheit des Güterbündels (k, l) am Ort i. Die Ungleichungen (7) besagen, daß der (k, l)-Preis in j den in i um höchstens die Transportkosten übersteigen darf; d.h. Arbitragegeschäfte sind ausgeschlossen. $\sum_l b_{lk} u_{lki}$ ist der Wert des Inputs und $\sum_l b_{kl} u_{kli}$ der Wert des Outputs der Firma k in i, und wegen (6) stellt

$$-v_{ki} = a_{ki} - q_k - r_i - \sum_l b_{lk} u_{lki} + \sum_l b_{kl} u_{kli}$$

den Gewinn dar, den die Firma k am Ort i erzielt, d.h. v_{ki} den entsprechenden Verlust. Das Programm $(LQAP^*)$ fordert *nicht* $v_{ki} \geq 0$: positive Gewinne sind nicht verboten.

Die hier eingeführten „Schattenpreise" u, q, r sind eine direkte Verallgemeinerung der gewöhnlichen LP-Schattenpreise; im Gegensatz zu den zurückgerechneten dualen Variablen in Alcaly and Klevorick [1966] bzw. Gomory and Baumol [1960] hängt ihr Wert nicht vom Verlauf eines Schnittebenenalgorithmus ab. Zwischen den alternativen Schattenpreiskonzepten bestehen enge Beziehungen, auf die hier jedoch nicht eingegangen werden soll.

Sei nun $(\bar{x}, \bar{y})$ eine optimale Lösung von $(LQAP)$ und $(\bar{x}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{v})$ eine von $(LQAP^*)$. Soll $(\bar{q}, \bar{r}, \bar{v})$ als Preissystem die optimale Zuweisung $\bar{x}$ aufrechterhalten, so werden üblicherweise die folgenden klassischen Forderungen erhoben:

(a) Am zugewiesenen Standort macht Firma k keinen Verlust (sonst würde sie die Produktion einstellen) aber auch keinen Gewinn; also $\bar{v}_{ki} = 0$, falls $\bar{x}_{ki} = 1$. Kurz, für alle k, i

$$\bar{v}_{ki}\, \bar{x}_{ki} = 0. \tag{9}$$

(b) Die Firma k kann an keinem anderen Ort einen höheren Gewinn erzielen als an dem ihr zugewiesenen. Der Gewinn am zugewiesenen Ort ist $\Sigma_i\, \bar{v}_{ki}\, \bar{x}_{ki}$; also lautet die Bedingung für alle k, j

$$\sum_i \bar{v}_{ki}\, \bar{x}_{ki} \leq \bar{v}_{kj}. \tag{10}$$

Die Forderung $\bar{v}_{ki}\, \bar{x}_{ki} \leq 0$, daß nirgends mit Verlust produziert wird, liegt auf der Hand; sie muß jedenfalls für solche Firmen gestellt werden, die mit irgendeiner anderen Firma in Austausch stehen, d.h. für die es ein l gibt mit $b_{kl} > 0$ oder $b_{lk} > 0$.
$\bar{v}_{ki}\, \bar{x}_{ki} \geq 0$, der Ausschluß von positiven Gewinnen, hat zur Folge, daß jede Firma effizient produziert. Wäre schließlich für ein k und ein j (10) verletzt, gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so daß der Firmeninhaber k dem Standorteigner j eine höhere Rente $\bar{r}_j + \varepsilon$ anbieten und so ggf.[6] die dort ansässige Firma verdrängen könnte.

Offenbar lassen sich gerade die beiden letztgenannten Forderungen abschwächen, wenn man die m Firmen und n Standorte als abgeschlossenes System

[6] Genau dann, wenn $\sum_l \bar{v}_{lj} \bar{x}_{lj} < \bar{v}_{kj}$ ist.

ansieht und bedenkt, daß die Verdrängung einer Firma grundsätzlich eine Neuzuweisung aller Firmen nach sich zieht. Solche Überlegungen führen auf spieltheoretische Ansätze, auf die hier nicht eingegangen werden soll[7]. – Aus (9) und (10) folgt

$$\bar{v} \geq 0 \tag{11}$$

und

$$\bar{v}\bar{x} = 0, \tag{12}$$

und umgekehrt. Wenn (11) und (12) zutreffen und außerdem $\bar{q}$ nichtnegativ ist, sollen $\bar{q}, \bar{r}$ und das zugehörige $\bar{u}$ *Effizienzpreise* von (QAP) heißen. (11) und (12) werden nun genau dann erfüllt, wenn $(LQAP)$ bereits durch (L) gelöst wird, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 2: Seien $(\bar{x}, \bar{y})$ und $(\bar{x}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{v})$ optimale Lösungen von $(LQAP)$ bzw. $(LQAP^*)$. Dann gilt:

$(\bar{x}, \bar{y})$ und $(\bar{q}, \bar{r}, \bar{v})$ sind optimale Lösungen von (L) bzw. seinem Dual dann und nur dann, wenn $\bar{v} \geq 0$ und $\bar{v}\bar{x} = 0$ gilt.

Der Beweis, der auf Lemma 1 fußt, wird hier unterdrückt. Die für das (QAP) definierten Effizienzpreise sind wegen Lemma 2 gerade die nichtnegativen q, r und u, die die Effizienzbedingungen von (L) erfüllen, nämlich

$$v_{ki} \begin{cases} \geq 0 \\ = 0, \end{cases} \quad \text{falls } \bar{x}_{ki} > 0 \tag{13}$$

$$u_{klj} - u_{kli} \begin{cases} \leq c_{ij} \\ = c_{ij}, \end{cases} \quad \text{falls } \bar{y}_{klij} = b_{kl}\bar{x}_{ki}\bar{x}_{lj} > 0. \tag{14}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man die Standorte so umnumerieren, daß $\bar{x}_{kk} = 1$ ist. Dann werden (13) und (14) zu

$$\begin{cases} v_{kk} = 0 \\ v_{ki} \geq 0 \end{cases} \tag{13'}$$

$$\begin{cases} u_{kll} - u_{klk} = c_{kl}, & \text{falls } b_{kl} > 0 \\ u_{klj} - u_{kli} \leq c_{ij}. \end{cases} \tag{14'}$$

3. *Die Existenz von Effizienzpreisen*

Ob zu einem vorgelegten (QAP) Effizienzpreise existieren, hängt von den Parametermatrizen A, B und C ab.

Sei x eine optimale Zuweisung und die Standorte wieder so numeriert, daß $x_{kk} = 1$ ist. Mit der Bezeichnung

[7] Siehe dazu den Ansatz von HAUPTMANN [1978].

$$d_{ki} := a_{ki} + \sum_l (b_{kl}c_{ki} - b_{lk}c_{li})$$

gilt der Satz

Satz 1: Die Bedingungen

$$d_{kk} \geq 0 \qquad \text{für alle } k \tag{15}$$

und

$$d_{kk} - d_{ki} \geq 0 \qquad \text{für alle } k, i \tag{16}$$

oder

$$d_{ii} - d_{ki} \geq 0 \qquad \text{für alle } k, i \tag{16'}$$

sind zusammen hinreichend, die Bedingung

$$\sum_{ki} (d_{kk} - d_{ki}) \geq 0 \tag{17}$$

ist notwendig für die Existenz von Effizienzpreisen.

Beweis: a) Das Hinreichen der Bedingungen (15) und (16) bzw. (16′) kann man durch eine Anwendung des Farkas-Lemmas auf (13′) und (14′) zeigen. Es lassen sich aber auch Effizienzpreise direkt angeben:

Setze $r_i := r_0 := \frac{1}{3} \min_k d_{kk}$ für alle i; setze für alle k und l

$$u_{klk} := u_0 := \begin{cases} \min_k \dfrac{d_{kk}}{3|\sigma_k|}, \text{ falls } \sigma_k \neq 0 \\ 1 \text{ sonst,} \end{cases}$$

wobei $\quad \sigma_k := \sum_l (b_{kl} - b_{lk})$.

Für alle k, l und i setze

$$u_{kli} := u_{klk} + c_{ki} = u_0 + c_{ki}, \text{ und für alle } k$$

$$q_k := d_{kk} - r_0 + u_0 \sigma_k.$$

Wenn (15) gilt, dann ist $r \geq 0$ und $u \geq 0$; durch Einsetzen und kurzes Rechnen erhält man $q \geq 0$ sowie (14′), ferner (13′) mit Hilfe von (16). Damit wurden unter den Voraussetzungen (15) und (16) Effizienzpreise konstruiert. An die Stelle von (16) darf offenbar (16′) treten, da in unserem Problem die Bezeichnungen „Firmen" und „Standorte" vertauscht werden können.

b) Offenbar ist die gleichmäßig gebrochene Zuweisung

$$x_{ki} = 1/n,\ y_{klij} = \begin{cases} b_{kl}/n & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine zulässige Lösung für (L); sie hat den Wert

$$\frac{1}{n}\sum_{ki} a_{ki} - \frac{1}{n}\sum_{kli} c_{ii} b_{kl} = \frac{1}{n}\sum_{ki} a_{ki},$$

weil $c_{ii}=0$ ist. Wenn es Effizienzpreise gibt, die die optimale Lösung $\bar{x}_{kk}=1$ des (QAP) aufrechterhalten, ist $\bar{x}$ auch optimale Lösung von (L) mit dem Wert

$$\sum_k a_{kk} - \sum_{lk} b_{lk} c_{lk},$$

der nicht kleiner als der obige sein kann; also gilt[8]

$$\sum_k \left(a_{kk} - \frac{1}{n}\sum_i a_{ki}\right) \geq \sum_{lk} b_{lk} c_{lk}, \tag{18}$$

was gleichbedeutend mit (17) ist. Q.E.D.

Bemerkung: An Stelle der gleichmäßig gebrochenen Zuweisung kann man auch jede andere zulässige Lösung von (L) verwenden, um eine notwendige Bedingung herzuleiten. Für spezielle A, B und C läßt sich daher (18) – bzw. (17) – verschärfen.

Die hinreichenden Bedingungen (15), (16), (16′) lauten ausgeschrieben:

$$a_{kk} - \sum_l b_{lk} c_{lk} \geq 0 \tag{19}$$

$$a_{kk} - \sum_l b_{lk} c_{lk} - c_{ki} \sum_l b_{kl} \geq a_{ki} - \sum_l b_{lk} c_{li} \tag{20}$$

$$a_{ii} - \sum_l b_{li} c_{li} - c_{ki} \sum_l b_{kl} \geq a_{ki} - \sum_l b_{lk} c_{li}. \tag{20'}$$

Beim Standortproblem läßt sich $a_{ki} - \sum_l b_{lk} c_{li}$ als eine Nettoeinnahme auffassen: die standortgebundene Einnahme der Firma k, wenn sie sich ceteris paribus in i befinden würde, vermindert um die Transportkosten des Inputs[9]. (19) bedeutet, daß diese Nettoeinnahme am optimalen Standort nicht negativ ist. (20) besagt, daß sie am optimalen Standort die entsprechenden Nettoeinnahmen an den anderen Standorten um mindestens $c_{ki} \sum_l b_{kl}$ übersteigt, nämlich um die Kosten, den gesamten Output von k nach i zu transportieren; kurz, am Ort i zu produzieren, ist nicht günstiger, als am (optimalen) Ort k zu produzieren und dann den Output nach i zu verfrachten. (20′) besagt das Gleiche aus der Sicht des Standorteigners i.

Die notwendige Bedingung (17) bzw. (18) macht eine Aussage über die erforderliche Variationsbreite der a_{ki}. Sie fordert, daß in der optimalen Zuweisung die totalen Transportkosten $\sum_{lk} b_{lk} c_{lk}$ nicht größer sind als die Beträge, um die die am optimalen Ort realisierten a_{kk} den Durchschnitt der möglichen a_{ki} übersteigen, aggregiert über alle Firmen k.

---

[8] Für eine andere Herleitung dieser Bedingung s. HEFFLEY [1972] S. 1162.

[9] Sie ist gleich dem Gewinn $-v_{ki}$, wenn die Renten q_k und r_i sowie die ab-Werk-Preise u_{klk} Null sind.

Beispiel 1: Für die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}10 & 12 & 8\\ 18 & 20 & 18\\ 13 & 10 & 15\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

ist $x_{kk}=1$ optimal. Man berechnet

$$D:=(d_{ki})=\begin{pmatrix}8 & 8 & 7{,}2\\ 19 & 19{,}5 & 18{,}9\\ 14 & 14{,}5 & 14{,}9\end{pmatrix}$$

und sieht, daß (15) und (16) zutreffen, also Effizienzpreise existieren; dies, obwohl z. B. a_{11} weder Zeilen- noch Spaltenmaximum ist.

Beispiel 2: Zu den Parametern

$$A=\begin{pmatrix}8 & 2 & 5\\ 9 & 6 & 7\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

des housing-market-Beispiels von SHAPLEY and SHUBIK [1972] ist wieder $x_{kk}=1$ optimal und

$$D=\begin{pmatrix}7 & 3 & 7\\ 11 & 4 & 8\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

was die notwendige Bedingung (17) – und außerdem (15), (16) und (16′) – verletzt.

Beispiel 3: (Hierarchie zentraler Orte):

Wir betrachten ein sehr einfaches Modell einer Hierarchie von Orten: Aus n Orten $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ werden m ausgewählt und mit einem Rang $k\in\{1,2,\ldots,m\}$ versehen (was den Ertrag a_{ki} und gewisse Transportkosten zur Folge hat). Ein Ort des Ranges k liefert seinen Output – er sei gleich β_k – zu gleichen Teilen an die Orte des höheren Ranges; formal heißt das:

$$b_{kl}=\begin{cases}\dfrac{\beta_k}{m-k} & \text{für } l>k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

also z. B. im Fall $m=3$

$$B=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\beta_1}{2} & \dfrac{\beta_1}{2}\\ 0 & 0 & \beta_2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Sei $c_{ij}=1$ für $i \neq j$. Notwendig für die Existenz eines Effizienzpreissystems zu $x_{kk}=1$ ist hier

$$\sum_{ki} (a_{kk}-a_{ki}) \geq n \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k ,$$

hinreichend:

$$a_{11} \geq 0,$$

$$a_{kk} \geq \frac{\beta_1}{m-1} + \frac{\beta_2}{m-2} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{m-k+1} \qquad \text{für } k \geq 2,$$

$$a_{kk}-a_{ki} \geq \begin{cases} \beta_k + \dfrac{\beta_i}{m-i} & \text{für } i<k<m \\ \beta_k & \text{für } k<i,\ k<m \\ \dfrac{\beta_i}{n-i} & \text{für } i<k=m \\ 0 & \text{für } i>k=m. \end{cases}$$

Beispiel 4: (Problem des Handlungsreisenden):
Hier ist A die Nullmatrix und

$$b_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } l=k+1 \text{ (modulo } m) \\ 0 & \text{sonst }. \end{cases}$$

Wenn die Route $<1, 2, \dots, m, 1>$ optimal ist und Preise existieren, muß wegen (18')

$$0 \geq \sum_{l=1}^{m-1} c_{l,\,l+1} + c_{m1}$$

sein, also jede Kante des optimalen Weges den Wert $c_{l,\,l+1}=0$ haben. Das Problem ist also nur dann dezentral zu lösen, wenn es ohnehin trivial ist.

4. *Änderungen der Parameter, Subventionen und Steuern*

Es stellt sich die Frage, ob es „vernünftige" Manipulationen der Parameter gibt, die bewirken, daß eine optimale Zuweisung durch Effizienzpreise aufrechterhalten wird, oder daß zumindest eine der Bedingungen (18), (19), (20) oder (20') zutrifft. (19) läßt sich erzwingen, indem man zu allen a_{ki} eine Konstante addiert, was offenbar die optimale Zuweisung nicht berührt. (18) läßt sich durch Verkleinern der c_{ij} – etwa eine proportionale Ermäßigung der Transporttarife – oder der b_{kl} erreichen; dabei bleibt jedoch im allgemeinen die Zuweisung $x_{kk}=1$ nicht optimal. Läßt man die b_{kl} oder die c_{ij} gegen 0 gehen, erhält man ohnehin in der Grenze ein lineares Assignment-Problem. Überdies lassen sich einige qualitative Konklusionen ziehen: Wenn die Frachtraten zu hoch oder der Güteraustausch zu umfangreich ist, können keine Effizienzpreise existieren, ebenso, wenn sich die standortgebundenen Einnahmen a_{ki} bezüglich der Orte zu wenig unterscheiden. Wenn hingegen die bei einer optimalen Zuweisung realisierten a_{ki} alle nicht realisierten um einen hinreichend großen Betrag übersteigen und sämtliche Transportkosten gegen diese Differenzbeträge klein sind, gibt es Preise, die diese Zuweisung erhalten.

Wir wollen – präziser – die Frage untersuchen, wie die Matrix A zu verändern ist, damit eine optimale Lösung in jedem Fall dezentralisiert werden kann, und ersetzen zu diesem Zweck a_{ki} durch die Summe $a_{ki}+s_{ki}$. (L) wird zu dem nicht-ganzzahligen linearen Programm

$$(S) \qquad \max_{(x,y)\in\tilde{Z}} \sum_{ki} (a_{ki}+s_{ki})\, x_{ki} - \sum_{klij} c_{ij} y_{klij},$$

dessen (gewöhnliches) Dual lautet

$$(S^*) \quad \begin{cases} & \min\limits_{q_k,\, r_i,\, v^*_{ki}} \sum\limits_k q_k + \sum\limits_i r_i \qquad \text{unter} \\ (21) & q_k + r_i + \sum\limits_l b_{lk} u_{lki} - \sum\limits_l b_{kl} u_{kli} - v^*_{ki} = a_{ki} + s_{ki} \\ (22) & u_{klj} - u_{kli} \leq c_{ij} \\ (23) & u_{kli} \geq 0,\ r_i \geq 0 \\ (24) & v^*_{ki} \geq 0. \end{cases}$$

Satz 2: Seien $(\bar{x}, \bar{y})$ und $(\bar{x}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{v})$ optimale Lösungen von $(LQAP)$ bzw. $(LQAP^*)$. Sei

$$(25) \qquad s_{ki} := \begin{cases} \bar{v}_{ki} & \text{falls } \bar{x}_{ki} = 1 \\ 0 & \text{falls } \bar{x}_{ki} = 0,\ \bar{v}_{ki} \geq 0 \\ \bar{v}_{ki} & \text{falls } \bar{x}_{ki} = 0,\ \bar{v}_{ki} < 0 \end{cases}$$

$$(26) \qquad \bar{v}^*_{ki} := \bar{v}_{ki} - s_{ki}$$

Dann ist $(\bar{x}, \bar{y})$ optimale Lösung von (S) und $(\bar{q}, \bar{r}, \bar{v}^*)$ von (S^*), und es gilt

$$(27) \qquad \sum_{ki} s_{ki}\, \bar{x}_{ki} = \sum_k \bar{q}_k + \sum_i \bar{r}_i + \sum_{klij} b_{kl}\, c_{ij}\, \bar{x}_{ki}\, \bar{x}_{lj} - \sum_{ki} a_{ki}\, \bar{x}_{ki}.$$

Beweis: Wegen (25) und (26) ist

$$(28) \qquad \bar{v}^*_{ki} \geq 0 \text{ } \textit{sowie} \text{ } \bar{v}^*_{ki} = 0, \text{ falls } \bar{x}_{ki} = 1.$$

$(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \subset \tilde{Z}$ ist zulässig für (S); $\bar{q}, \bar{r}, \bar{v}, \bar{u}$ erfüllen (7) und (8), d.h. (22) und (23), ferner (6), also nach Einsetzen von $\bar{v}_{ki} = s_{ki} + \bar{v}^*_{ki}$ auch (21). $\bar{q}, \bar{r}, \bar{v}^*$ sind deshalb zulässig für (S^*). Bereits für $(LQAP)$ bzw. $(LQAP^*)$ gelten die Effizienzbedingungen

$$\bar{u}_{kli}\,(\bar{x}_{ki}b_{kl} + \sum_j \bar{y}_{klji} - \bar{x}_{li}b_{kl} - \sum_j \bar{y}_{klij}) = 0\,,$$

$$\bar{y}_{klij}\,(\bar{u}_{klj} - \bar{u}_{kli} - c_{ij}) = 0\,,$$

weiter gilt wegen (28)

$$\bar{x}_{ki}\bar{v}^*_{ki} = \bar{x}_{ki}(\bar{q}_k + \bar{r}_i + \sum_l b_{lk}\bar{u}_{lki} - \sum_l b_{kl}\bar{u}_{kli} - a_{ki} - s_{ki}) = 0\,.$$

Also sind $(\bar{x}, \bar{y})$ und $(\bar{q}, \bar{r}, \bar{v}^*)$ auch optimal für (S) bzw. (S^*). (27) folgt dann aus

$$\sum_{ki} (a_{ki} + s_{ki})\,\bar{x}_{ki} - \sum_{klij} c_{ij}\bar{y}_{klij} = \sum_k \bar{q}_k + \sum_i \bar{r}_i\,; \qquad \text{Q.E.D.}$$

Der Term s_{ki} in (S) kann – wenn er positiv ist – als „*Subvention*“ interpretiert werden, die gezahlt wird, wenn die Zuweisung k zu i zustandekommt; ein negatives s_{ki} stellt entsprechend eine „*Steuer*“ dar. Der Satz besagt dann: Wenn eine optimale Zuweisung der Standorte bekannt ist, kann eine übergeordnete Autorität durch Zahlung von Subventionen und Auferlegung von Steuern eine Situation schaffen, in der diese Zuweisung auch für jeden einzelnen der Akteure – Standorteigner wie Firmeninhaber – kosteneffizient ist. Dabei werden alle möglichen profitablen Zuweisungen (k, i) in Höhe des möglichen Gewinnes $\bar{v}_{ki}$ besteuert und alle Verluste ersetzt, die sonst bei der optimalen Zuweisung $\bar{x}$ entstünden. Wurde die Einnahmenmatrix in dieser Weise verändert, so ergibt sich $\bar{x}$ – und die zugehörigen Güterströme $\bar{y}$ – als Lösung des gewöhnlichen linearen Programms (S); die effizienten Standortrenten $\bar{r}_i$ und Firmenentlohnungen $\bar{q}_k$ ergeben sich als Lösung des zu (S) dualen Programms (S^*). Die Werte der Lösung des ursprünglichen Problems $(LQAP)/(LQAP^*)$ unterscheiden sich von denen des „subventionierten“ Problems $(S)/(S^*)$ nur in den realisierten Gewinnen $-\bar{v}_{ki}$ bzw. $-\bar{v}^*_{ki}$. Die gezahlten Nettosubventionen $\sum_{ki} s_{ki}\,\bar{x}_{ki}$ ist wegen (27) gleich Faktorkosten plus Transportkosten minus standortgebundenen Einnahmen; sie ist genau dann Null, wenn (12), nämlich $\bar{v}\bar{x} = 0$, gilt.

In der Realität sind Verteilungen von Firmen auf Standorte häufig deshalb stabil, weil ein Wechsel des Standorts mit Kosten verbunden ist, die den Gewinn am neuen Standort schmälern. Die Kosten eines etwaigen Ortswechsels haben wir bisher vernachlässigt. Nehmen wir nun an, für Firma k kostet es e_{ki} DM, von ihrem (optimalen) Standort k zum Standort i $(i \neq k)$ überzuwechseln; dabei ist e_{ki} als geeignete Annuität zu verstehen. In einer solchen Situation ist der Wechsel genau dann nicht profitabel, wenn $e_{ki} \geq \bar{v}_{kk} - \bar{v}_{ki}$ gilt, d.h. e_{ki} die Gewinndifferenz übersteigt. Nach Satz 2 genügt also $e_{ki} \geq s_{kk} - s_{ki}$ für alle $k \neq i$, um die optimale Zuweisung stabil zu erhalten.

Summary

On a Decentralization of the Quadratic Location Problem

The quadratic location problem using the Koopmans-Beckmann objective function

$$\sum a_{ki}x_{ki} - \sum b_{kl}c_{ij}x_{ki}x_{lj}$$

is discussed as an allocation model for mutually interdependent indivisible activities. The paper begins by discussing a linearization of the problem and the corresponding dual; next, it presents the conditions under which an optimal assignment is sustained by efficiency prices, that is, the conditions required for the functioning of a dezentralized market system. In addition, changes in the parameters are discussed and a system of subsidies and taxes as well as lower bounds for the costs of moving are presented, each of which allows a decentralization of the problem.

Literatur

ALCALY, R.E. and KLEVORICK, A.K. [1966], "A note on the dual prices of integer programs", *Econometrica* 34, 206–214.

BALAS, E. [1970], "Duality in discrete programming", in: H.W. Kuhn (ed.), *Proc. Princeton Symp. Mathematical Programming,* Princeton, N.J.

CONRAD, K. [1971], *Das quadratische Zuweisungsproblem und zwei seiner Spezialfälle,* Tübingen.

GOMORY, R.E. and BAUMOL, W.J. [1960], "Integer programming and pricing", *Econometrica* 28, 521–550.

HARTWICK, J.M. [1974], "Price sustainability of location assignments", *Journal of Urban Economics* 1, 147–160.

HAUPTMANN, H. [1978], „Ein Zuordnungsspiel in der Standorttheorie", S. 471–485, in: R. Henn (ed), *Operations Research Verfahren* XXIX.

HEFFLEY, D.R. [1972], "The quadratic assignment problem: a note", *Econometrica* 40, 1155–1163.

-- [1976], *The core of an urban economy with intermediate goods,* Paper presented at the Meetings of the Econometric Society, Helsinki.

KOOPMANS, T.C. and BECKMANN, M.J. [1957], "Assignment problems and the location of economic activities", *Econometrica* 25, 52–76.

LAWLER, E.L. [1969], "The quadratic assignment problem", *Management Science* 9, 586–599.

SHAPLEY, L.S. and SHUBIK, M. [1972], "The assignment game I: the core", *International Journal Game Theory* 1, 111–130.

Dr. Karl Mosler
Hochschule der Bundeswehr Hamburg
Fachbereich Wirtschafts- und Organisationswissenschaften
Holstenhofweg 85
D-2000 Hamburg 70
Bundesrepublik Deutschland